



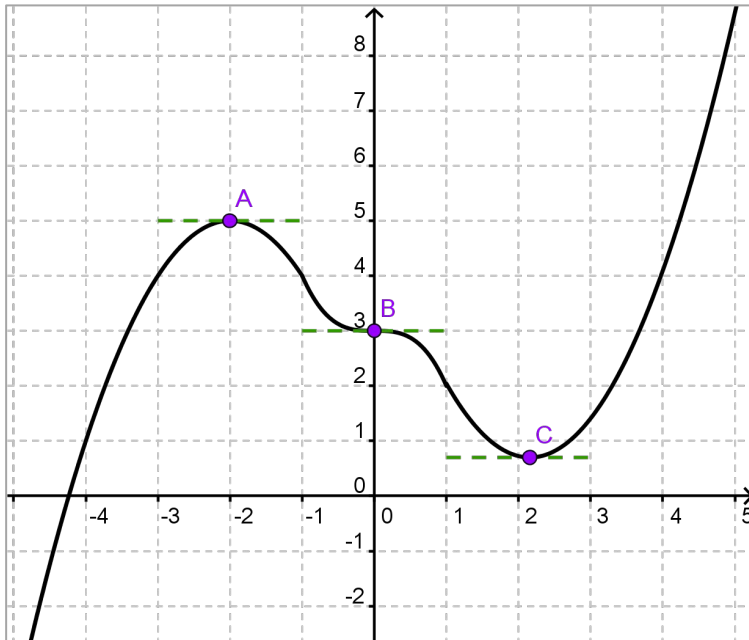
אנליזה

שיעור: מציאת נקודות קיצון

למדנו על הקשר בין נקודות הקיצון והנגזרת

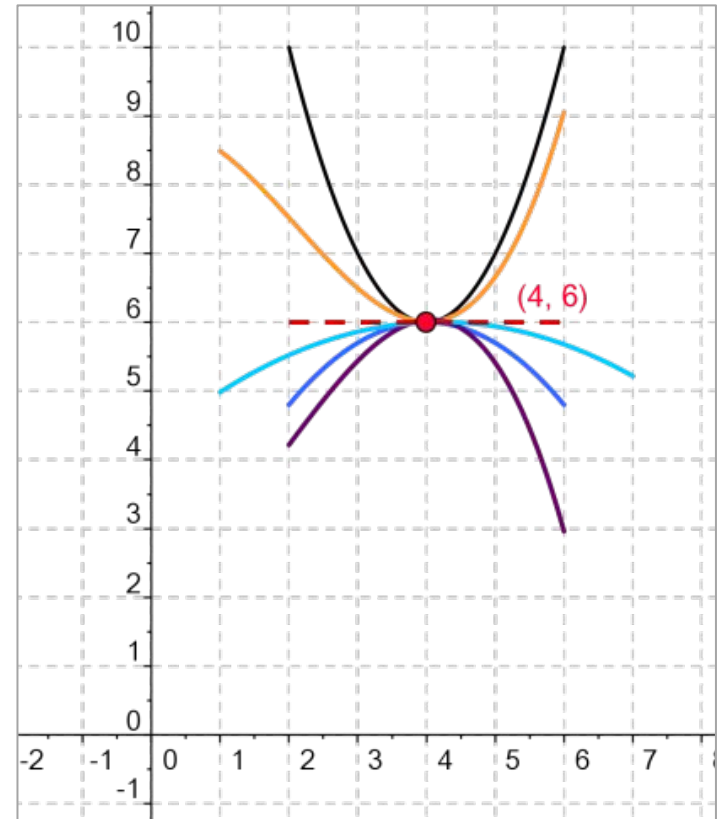
לא כל נקודה בה השיפוע אפס היא נקודת קיצון

נקרא לנקודות בהן השיפוע הוא אפס "נקודות חשודות" שהן נקודות קיצון.
נבדוק מה קורה בסביבות הקרובות שלהן.



לדוגמא בשרטוט הנקודות החשודות הן A, B ו-C כי שיפוע המשיק בהן הוא אפס.
A ו-C נקודות קיצון, B אינה נקודת קיצון.

בנקודת קיצון הנגזרת שווה לאפס



בשרטוט מופיעה נקודת הקיצון והמשיק לה

בשביל למצוא נקודות קיצון נחפש נקודות חשודות

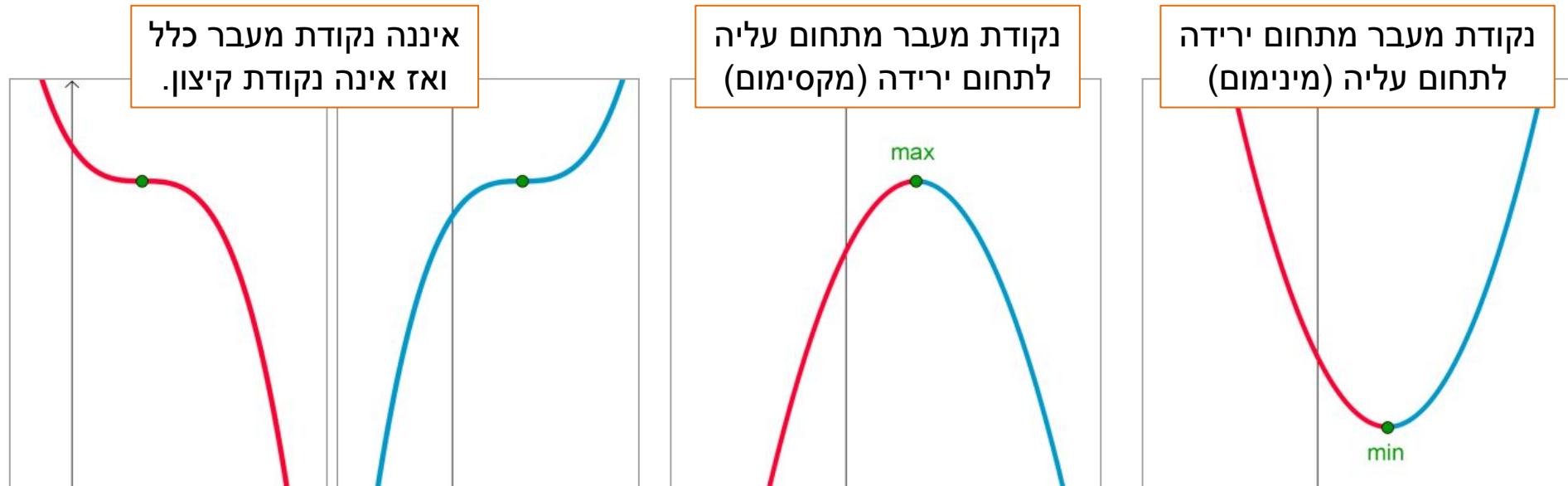
✓ כדי למצוא נקודות קיצון לפונקציה יש לחפש "נקודות חשודות" - נקודות בהן הנגזרת היא אפס.

✓ כדי לבדוק האם "נקודה חשודה" היא באמת נקודת קיצון, יש לברר האם היא:

איננה נקודת מעבר כלל
ואז אינה נקודת קיצון.

נקודת מעבר מתחום עליה
לתחום ירידה (מקסימום)

נקודת מעבר מתחום ירידה
לתחום עליה (מינימום)



מה מצפה לנו היום?



היום נמצא את נקודות קיצון בעצמנו

(1) מציאת נקודות קיצון בעזרת נקודות חשודות

(2) סיכום

מציאת נקודות קיצון בעזרת הנגזרת

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- מצאו נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון.

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

חיפוש נקודות "חשודות" | איפוס הנגזרת

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- מצאו נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון.

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• החשד מתעורר לגבי נקודות שבהן הנגזרת היא אפס, לכן נמצא נקודה בה הנגזרת היא אפס:

חיפוש נקודות "חשודות" | איפוס הנגזרת

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- מצאו נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון.

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• החשד מתעורר לגבי נקודות שבהן הנגזרת היא אפס, לכן נמצא נקודה בה הנגזרת היא אפס:

$$2x - 3 = 0$$

$$x = 1.5$$

האם הנקודה החשודה היא נקודת קיצון? | דרכים לבדיקה

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

האם הנקודה החשודה היא נקודת קיצון? | דרכים לבדיקה

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

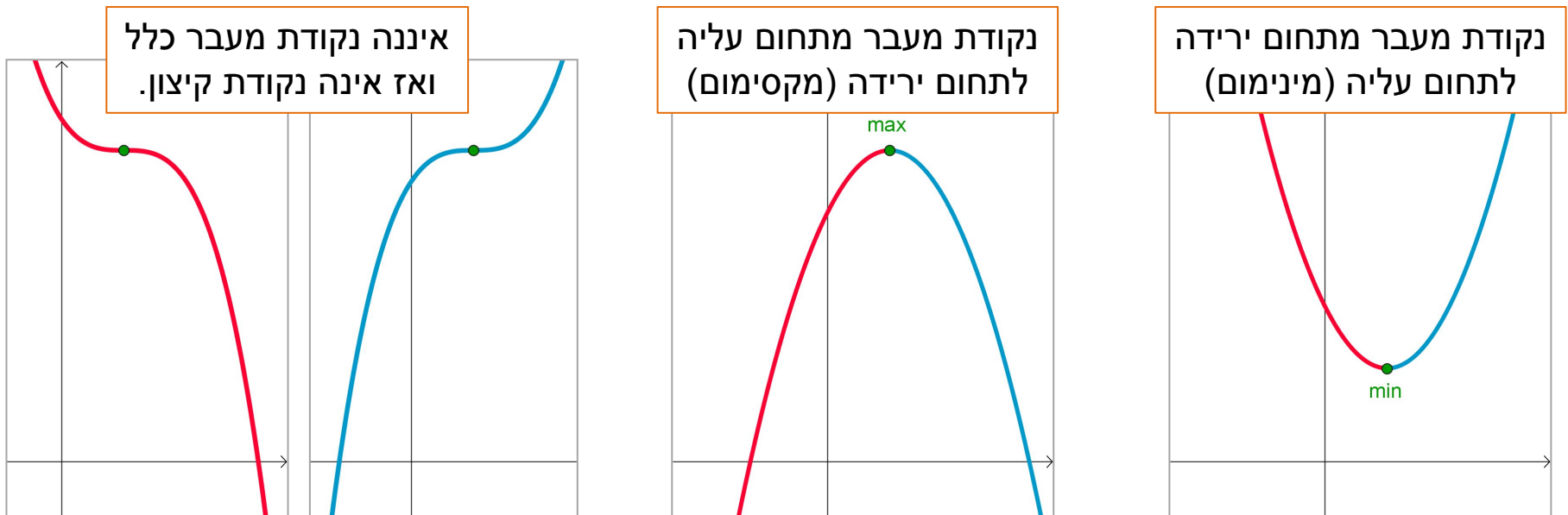
-א נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

-ב הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

-ג האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• כדי לבדוק האם "נקודה חשודה" היא באמת נקודת קיצון, יש לברר האם היא:



בדיקת הנקודה החשודה | חלוקה לתחומים

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

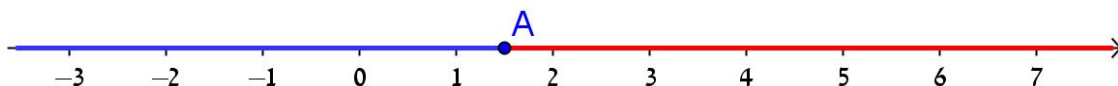
א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• בפונקציה זו גילינו רק נקודה חשודה אחת. הנקודה החשודה מפרידה את המספרים לשני תחומים:



$$x < 1.5, x > 1.5$$

בדיקת הנקודה החשודה | חלוקה לתחומים

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

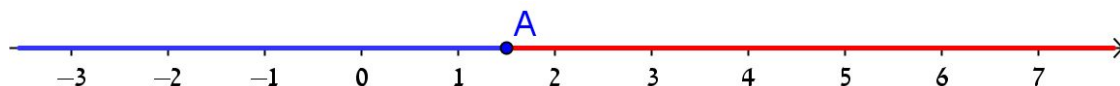
א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• בפונקציה זו גילינו רק נקודה חשודה אחת. הנקודה החשודה מפרידה את המספרים לשני תחומים:



$$x < 1.5, x > 1.5$$

• בתוך כל אחד מהתחומים לא התגלתה נקודה חשודה, ולכן לא תיתכן באף אחד מהם נקודת קיצון נוספת.

כלומר בתוך כל תחום לא ייתכן מעבר מעלייה לירידה או מעבר מירידה לעלייה.

המעבר היחיד (אם בכלל) יכול להיות בנקודה החשודה.

בדיקת הנקודה החשודה | חלוקה לתחומים

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

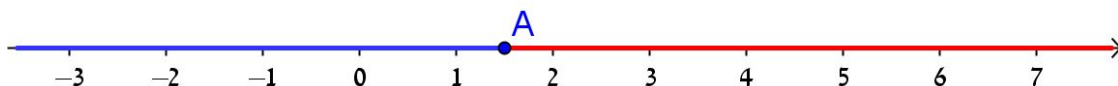
א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון (כלומר האם החשד מתאמת)

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• בפונקציה זו גילינו רק נקודה חשודה אחת. הנקודה החשודה מפרידה את המספרים לשני תחומים:



$$x < 1.5, x > 1.5$$

• בתוך כל אחד מהתחומים לא התגלתה נקודה חשודה, ולכן לא תיתכן באף אחד מהם נקודת קיצון נוספת.

כלומר בתוך כל תחום לא ייתכן מעבר מעלייה לירידה או מעבר מירידה לעלייה.

המעבר היחיד (אם בכלל) יכול להיות בנקודה החשודה.

• בכל תחום. הפונקציה רה עולה (נגזרת חיובית) או הפונקציה רה יורדת (נגזרת שלילית).

בדיקת הנקודה החשודה | סימן הנגזרת בכל תחום

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• הנקודה החשודה מפרידה את המספרים לשני תחומים: $x < 1.5$, $x > 1.5$



• מספיק לבדוק את סימן הנגזרת בנקודה אחת בכל תחום.

בדיקת הנקודה החשודה | סימן הנגזרת בתחום הימני

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• נתבונן בתחום הימני $x > 1.5$.



• במקרה הזה, אפשר לראות שהצבת כל ערך x בביטוי של נגזרת הפונקציה $f'(x) = 2x - 3$,

תיתן ערך חיובי שמשמעותו שהפונקציה עצמה עולה בכל התחום הימני.

בדיקת הנקודה החשודה | סימן הנגזרת בתחום הימני

- נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$
- א נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$
- ב הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון
- ג האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

- נתבונן בתחום הימני $x > 1.5$.



- במקרה הזה, אפשר לראות שהצבת כל ערך x בביטוי של נגזרת הפונקציה $f'(x) = 2x - 3$, תיתן ערך חיובי שמשמעותו שהפונקציה עצמה עולה בכל התחום הימני.
- כיוון שבתוך התחום $x > 1.5$ אין אף נקודה חשודה נוספת, אפשר לבחור ערך x כלשהו כמייצג את כל התחום. אם נבחר. מטעמי נוחיות. את הערך $x=2$ נקבל $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$

בדיקת הנקודה החשודה | סימן הנגזרת בתחום השמאלי

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• נתבונן בתחום השמאלי $x < 1.5$.



• באופן דומה, ניתן לבחור ערך מייצג בתחום $x < 1.5$.

• אם נבחר, מטעמי נוחיות, את הערך $x=0$ נקבל $f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -1$

• התוצאה, ששיפוע הגרף עבור הערך $x=0$, הוא שלילי, מייצגת כל נקודה אחרת שנמצאת בתחום,

ולכן אפשר להסתפק בה. המשמעות היא שהפונקציה עצמה יורדת בכל התחום השמאלי.

בדיקת הנקודה החשודה | מעבר מתחום ירידה לעליה

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

- בתחום $x > 1.5$ קיבלנו $f'(2) > 0$ לכן הפונקציה **עולה** לאורך כל התחום הזה.
- בתחום $x < 1.5$ קיבלנו $f'(0) < 0$ לכן הפונקציה **יורדת** לאורך כל התחום הזה.

בדיקת הנקודה החשודה | הצגת המסקנות בטבלה

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון

ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• בתחום $x > 1.5$ קיבלנו $f'(2) > 0$ לכן הפונקציה עולה לאורך כל התחום הזה.

• בתחום $x < 1.5$ קיבלנו $f'(0) < 0$ לכן הפונקציה יורדת לאורך כל התחום הזה.

• נרכז את כל מה שקיבלנו בטבלה:

$x > 1.5$	$x = 1.5$	$x < 1.5$	x
			סימן הנגזרת f'
			עליה/ירידה של f
			נקודת קיצון?

בדיקת הנקודה החשודה | הצגת המסקנות בטבלה

• נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$

א- נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$

ב- הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון

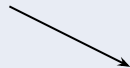
ג- האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

• בתחום $x > 1.5$ קיבלנו $f'(2) > 0$ לכן הפונקציה עולה לאורך כל התחום הזה.

• בתחום $x < 1.5$ קיבלנו $f'(0) < 0$ לכן הפונקציה יורדת לאורך כל התחום הזה.

• נרכז את כל מה שקיבלנו בטבלה:

$x > 1.5$	$x = 1.5$	$x < 1.5$	x
חיובי	אפס	שלילי	סימן הנגזרת f'
			עליה/ירידה של f
	מינימום		נקודת קיצון?

בדיקת הנקודה החשודה | קביעת סוג הקיצון

- נתונה נגזרת הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = 2x - 3$
- א נקודה שיש לגביה חשד שהיא עשויה להיות נקודת קיצון: $x = 1.5$
- ב הציעו דרך לבדיקה האם "נקודה החשודה" היא באמת נקודת קיצון
- ג האם ה"נקודה החשודה" היא נקודת קיצון? אם כן, רשמו את סוגה. (מינימום או מקסימום)

פתרון

- בתחום $x > 1.5$ קיבלנו $f'(2) > 0$ לכן הפונקציה עולה לאורך כל התחום הזה.
- בתחום $x < 1.5$ קיבלנו $f'(0) < 0$ לכן הפונקציה יורדת לאורך כל התחום הזה.
- נרכז את כל מה שקיבלנו בטבלה:

$x > 1.5$	$x = 1.5$	$x < 1.5$	x
חיובי	אפס	שלילי	סימן הנגזרת f'
			עליה/ירידה של f
	מינימום		נקודת קיצון?



היום נמצא את נקודות קיצון בעצמנו

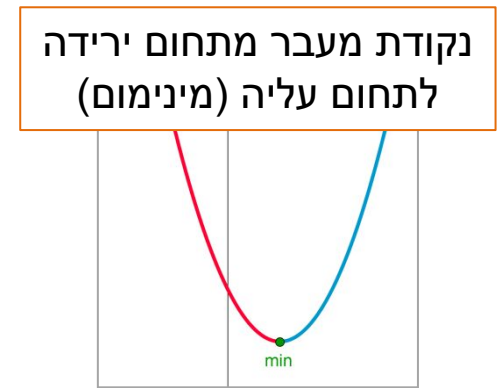
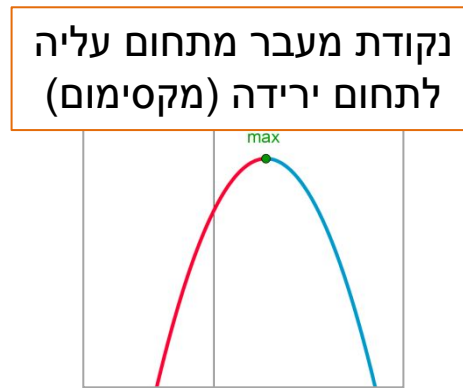
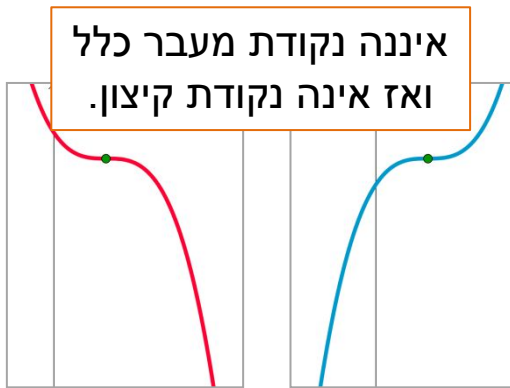
מציאת נקודות קיצון בעזרת נקודות חשודות ✓

סיכום (3)

היום למדנו כיצד למצוא נקודות קיצון של פונקציה

1. מחפשים "נקודות חשודות" - נקודות בהן הנגזרת היא אפס.

2. כדי לבדוק האם "נקודה חשודה" היא באמת נקודת קיצון, יש לברר האם היא:



3. הנקודות החשודות מחלקות את המספרים לתחומים, כאשר בכל תחום הפונקציה רק עולה (נגזרת חיובית) או רק יורדת (נגזרת שלילית), לכן מספיק לבדוק את סימן הנגזרת בנקודה אחת בכל תחום (שרירותית).

4. אפשר להיעזר בטבלה הבאה ולראות האם הנקודה היא קיצון, ואם כן – איזו (מינימום / מקסימום)

תחום ב	הנקודה החשודה	תחום א	x
			סימן הנגזרת f'
			עליה/ירידה של f
			נקודת קיצון?

33/832

26/4/20

ד"ר 5

$$y = x \left(\frac{3}{4}x^3 - 81 \right)$$

$$y' = x' \left(\frac{3}{4}x^3 - 81 \right) + x \left(\frac{3}{4}x^3 - 81 \right)'$$

$$y' = \frac{3}{4}x^3 - 81 + x \left(\frac{9}{4}x^2 \right)$$

$$1) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$2) x' = 1$$

$$3) (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$\left(\frac{3}{4}x^3 - 81 \right)' = \frac{3}{4} \cdot 3x^2 - 0 = \frac{9}{4}x^2$$

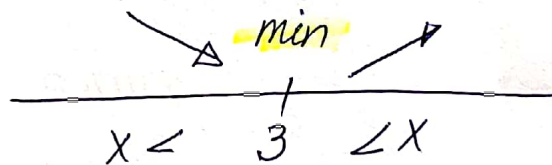
$$y' = \frac{3}{4}x^3 - 81 + \frac{9}{4}x^3 = \frac{12}{4}x^3 - 81 = 3x^3 - 81$$

$$y' = 0 \quad \text{נקודות קיצון}$$

$$3(x^3 - 27) = 0$$

$$x^3 = 27 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$x = 3$$



$$y'(2) = 3 \cdot 2^3 - 81 < 0$$

הפוחה הנקודה

$$y'(4) = 3 \cdot 4^3 - 81 > 0$$

הפוחה הנקודה

$$\Rightarrow x = 3 \quad \text{min'ק}$$

$$2) \quad x = 2 \quad y(2) = 2 \left(\frac{3}{4} \cdot 2^3 - 81 \right) = -150$$

$$(2, -150) \quad \downarrow y$$

$$x = 4 \quad y(4) = 4 \left(\frac{3}{4} \cdot 4^3 - 81 \right) = -132$$

$$(4, -132) \quad \uparrow y$$

29/831

$$y = x^3 - x^2 - 5x$$

$$-0.5 < x < 0.5$$

עין קצה

L3

$$y' = 3x^2 - 2x - 5$$

מתחיל:

$$y' = 0$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$a = 3 \\ b = -2 \\ c = -5$$

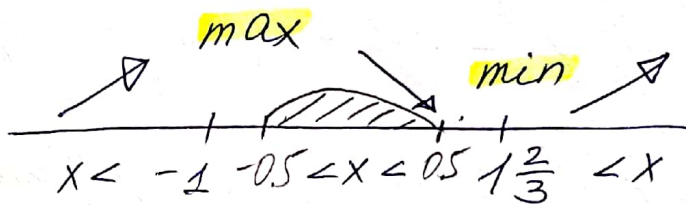
$$\Delta = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{6} < \frac{10}{6} \\ -1$$

$$x_1 = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$x_2 = -1$$



$$y'(0) = 3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 5 < 0$$

$$y'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 - 5 > 0$$

$$y'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 5 > 0$$

$$y(-1) = -1 - 1 + 5 = 3$$

$$y\left(\frac{5}{3}\right) = -6\frac{13}{27}$$

עין קצה וזר בתחום

$$-1 < x < 1\frac{2}{3}$$

⇓

-||- pd -||- -||-

$$-0.5 < x < 0.5$$

$$(-1, 3) \text{ max}$$

עין קצה וזר בתחום קיצון *

$$\left(\frac{5}{3}, -6\frac{13}{27}\right) \text{ min}$$

28/831

y = x^3 - 12x^2 + 51x

y' = 3x^2 - 24x + 51

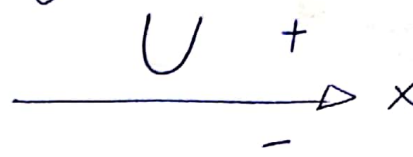
y' > 0 3x^2 - 24x + 51 = 0

Δ = (24)^2 - 4 * 3 * 51 < 0

y' > 0

y

110
כולל הנגזרת
y' > 0
3x^2 - 24x + 51 > 0



y = -1/5 x^5 + 2x^3 - 5x

y' = 5 * (-1/5) x^4 + 6x^2 - 5

y'(-3) = -(-3)^4 + 6 * 3^2 - 5 < 0

- y'(-2) > 0
- y'(0) < 0
- y'(2) > 0
- y'(3) < 0

מחזוריות / סימנים

x < -√5	↓
-1 < x < 1	
x > √5	
-√5 < x < 1	↑
1 < x < √5	

: min 11317J

- (-√5, 0)
- (1, -3 1/5)

: max 11317J

- (√5, 0)
- (-1, 3 1/5)

25/830

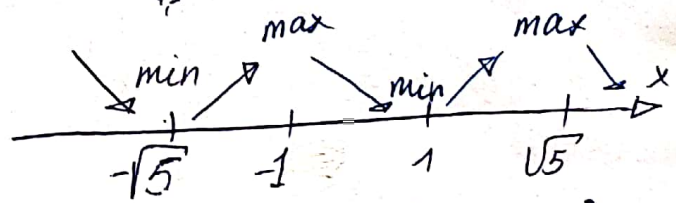
y' = -x^4 + 6x^2 - 5

y' = 0
x^4 - 6x^2 + 5 = 0 t = x^2
t^2 - 6t + 5 = 0

(t-5)(t-1) = 0

t = 5 t = 1

x = ±√5 t_{1,2} = ±1



y(-√5) = -1/5 (-√5)^5 + 2 * (√5)^3 - 5(√5)

y(-1) = -3 1/5 y(√5) = 0

y(-1) = 3 1/5